山区流域坡面流的一种近似解*

王协康　方　铎　曹叔尤
(四川联合大学高速水力学国家重点实验室　成都　610065)

提　要　在山区流域坡面流近似为运动波的条件下, 利用 Govindaraju et al 提出的坡面流分离变量形式, 导出了坡面流的偏微分基本方程. 根据坡面净雨历时与汇流平衡时间的关系, 得到了不同净雨历时的坡面流漫流过程.

关键词　山区流域　坡面流　运动波

最早进行坡面浅层水流研究的是美国学者 R. E. Horton(1934, 1935). 他认为坡面流是一种混合状态的水流, 其流态介于层流与紊流之间. 由坡面流的动量守恒和质量守恒可导出坡面流基本方程组为[1]

$$\begin{cases} h\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial t} = r \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} + r\dfrac{v}{h} + g(S_f - S_0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中　h 为坡面水深 (m), v 为坡面平均流速 (m/s), r 为净雨率 (m/s) (雨强与土壤下渗率的差值), g 为重力加速度 (m^2/s), x 为坡距 (m), S_0 为坡面平均比降, S_f 为摩阻比降.

由于式 (1)为非线性偏微分方程组, 在实际应用中需简化. 采用隐式差分等方法, 可对偏微分方程进行数值求解, 但因偏微分方程中涉及较多参数, 因而其应用具有很大的局限性. 自 Lighthill and Whitham[2]发表运动波理论以来, 对坡面流的应用已做了许多工作. 目前应用较多的是特征线方法, 而该方法仍然显得繁杂, 求解十分费时且涉及较多参数. 为此, 本文根据山区流域特性, 对坡面流漫流过程进行简化, 从理论上探讨坡面流的变化规律.

1　坡面流偏微分基本方程

山区流域坡面比降陡, 糙率大, 水流流态多为紊流. 在式 (1)的动力方程中, 其他各项与坡面比降和摩阻比降相比皆可忽略, 由此认为坡面水流接近运动波. D. A. Woolhiser and J. A. Liggett[3]指出, 为使运动波求解坡面流有效, 需使其"运动流数"K 值满足下式

$$K = S_0 L / (F_{r0}^2 H_0) > 10 \tag{2}$$

式中　S_0 为坡面比降, L 为坡长 (m), F_{r0} 为坡面末端弗汝德数, H_0 为坡面末端水深 (m). 沈冰等[4]通过实验指出: 在坡面降雨漫流过程中, 其"运动流数"K 值 > 100, 应用运动波描

* 国家自然科学基金资助项目 (编号: 49771055)

收稿日期: 1997-11-06, 改回日期: 1998-03-25

述坡面水流是合理的. 因而式(1)可化为

$$\begin{cases} h\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial t} = r \\ S_0 = S_f \end{cases} \tag{3}$$

由坡面水流的运动波模型或扩散波模型的理论可知[2], 坡面流坡末端的运动方程可用均匀流的水面线表示, H. 巴津认为坡面流速与其水深呈线性关系[5], 即

$$V = m\sqrt{S_f}\,h, \tag{4}$$

式中 m 为巴津系数(S^{-1}), S_f 为摩阻比降, v、h 分别为坡面流速(m/s)和水深(m). 利用 H. 巴津提出的流速关系式(4)得

$$S_f = V^2/(m^2h^2). \tag{5}$$

由式(3)和(5)得坡面流近似方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial t} = r \\ q = m\sqrt{S_0}\,h^2 \end{cases} \tag{6}$$

式中 q 为单宽流量(m^2/s).

Govindaraju *et al.*[2]在研究坡面水流时, 证实了坡面水深 $h(x, t)$ 可用如下分离变量形式近似描述

$$h(x, t) = h_L(t)\sin(\pi x/2L), \tag{7}$$

式中 x 为坡面沿程距(m), L 为坡面长度(m), $h_L(t)$ 为坡长 L 处的水深(m).

采用式(7)应用于式(6)中水流连续方程后, 产生的误差 $R(x, t)$ 可表示为

$$R(x, t) = \frac{\partial[h_L(t)\sin(\pi x/2L)]}{\partial t} + \frac{\partial[m\sqrt{S_0}\,h_L^2(t)\sin^2(\pi x/2L)]}{\partial x} - r. \tag{8}$$

由于 Govindaraju et al[2]对坡面流采用分离变量形式的近似假定能满足水流连续方程, 在任何时刻 t, 在坡面区域 $[0, L]$ 范围内, 其累积误差 $R(x, t)$ 应为零, 即

$$\int_0^L R(x, t)\,dx = 0, \tag{9}$$

由式(8)、(9)得

$$2h'_L(t) + \pi m\sqrt{S_0}\,h_L^2(t)/L - \pi r = 0 \tag{10}$$

式(10)即为所求坡面流偏微分基本方程.

2 净雨历时 $t_r \geqslant t_e$(汇流平衡时间)的坡面流近似解

根据坡面流汇流平衡理论[6]可知: 在汇流达到平衡时, 在坡长为 L 的断面出口平衡流量 q_e 和平衡时间 t_e 分别为

$$q_e = rL, \quad t_e = h_e/r, \tag{11}$$

由(6)式动力方程和(11)式得

$$r = m\sqrt{S_0}\,h_e^2/L, \quad t_e = L^{0.5}\left(rm\sqrt{S_0}\right)^{-0.5}, \tag{12}$$

式中 q_e 为坡长 L 处汇流平衡单宽流量(m^2/s), h_e 为对应水深(m), t_e 为平衡时间(s). 把

式(12)中 r 值代入(10)式得

$$2h'_L(t)+\pi m\sqrt{S_0}\,(h_L^2(t)-h_e^2)/L=0 \qquad (13)$$

则微分方程(13)式的解为

$$t=\pi m\sqrt{S_0}\,Ln\left[(h_e+h_L(t))/(h_e-h_L(t))\right]/4Lh_e+C \qquad (14)$$

式中 C 为积分常数.

由起始条件 $h_L(t)|_{t=0}=0$, 得 $C=0$. 由此(14)式变换为

$$h_L(t)=h_e(1-e^{Ut})/(1+e^{Ut}) \quad (t<t_e) \qquad (15)$$

把(15)式代入(7)式, 得坡面水深函数式为

$$h(x,t)=h_e Sin(\pi x/2L)(1-e^{Ut})/(1+e^{Ut}) \quad (t<t_e) \qquad (16)$$

式中 $U=-4r^{0.5}L^{1.5}(m\sqrt{S_0})^{-1.5}/\pi$

把(15)式代入(6)式水流动力方程, 得坡面单宽流量函数式为

$$q(x,t)=m\sqrt{S_0}\,h_e^2(t)Sin(\pi x/2L)(1-e^{Ut})^2/(1+e^{Ut})^2 \quad (t<t_e) \qquad (17)$$

此外, 根据坡面汇流理论可知[6], 在净雨历时 $t_r\geqslant t_e$ 时, $t_e\leqslant t\leqslant t_r$ 的坡面末端水深 $h_L(t)$ 为常数, 其值等于 h_e, 代入式(6)、(7)得

$$h(x,t)=h_e Sin(\pi x/2L) \quad t_e\leqslant t\leqslant t_r \qquad (18)$$

$$q(x,t)=m\sqrt{S_0}\,h_e^2 Sin^2(\pi x/2L) \quad t_e\leqslant t\leqslant t_r \qquad (19)$$

式中 $h_e=(rL)^{0.5}(m\sqrt{S_0})^{-0.5}$, $t_e=L^{0.5}(rm\sqrt{S_0})^{-0.5}$.

在净雨历时 $t_r\geqslant t_e$ 的情况下, 当净雨量为零, $t>t_r\geqslant t_e$ 的坡面末端水深变化方程(10)式变换为

$$2h'_L(t)+\pi m\sqrt{S_0}\,h_L^2(t)/L=0 \qquad (20)$$

对微分方程式(20)求解为

$$h_L(t)=\left[h_L^{-1}(t_r)+\pi m\sqrt{S_0}\,(t-t_r)/2L\right]^{-1} \quad (t>t_r\geqslant t_e) \qquad (21)$$

式中 $h_L(t_r)$ 是净雨为零时($t=t_r$), 坡末端出口断面水深(m), 由式(18)可得

$$h_L(t_r)=(rL)^{0.5}\left(m\sqrt{S_0}\right)^{-0.5} \qquad (22)$$

则由(6)、(7)、(21)、(22)可得在净雨历时 $t_r\geqslant t_e$ 时, 坡面流退水段近似解为

$$h(x,t)=\left[\left(m\sqrt{S_0}\right)^{0.5}(rL)^{-0.5}+\pi m\sqrt{S_0}\,(t-t_r)/2L\right]^{-1}Sin(\pi x/2L) \quad (t>t_r\geqslant t_e) \qquad (23)$$

$$q(x,t)=m\sqrt{S_0}\,Sin^2(\pi x/2L)\left[\left(m\sqrt{S_0}\right)^{0.5}(rL)^{-0.5}+\pi m\sqrt{S_0}\,(t-t_r)/2L\right]^{-2} \quad (t>t_r\geqslant t_e) \qquad (24)$$

由上述可知, 当净雨历时 $t_r\geqslant t_e$ 时, 由式(16)、(17)、(18)、(19)、(23)、(24)可求坡面流随时空变化的漫流过程.

3　净雨历时 $t_r<t_e$ (汇流平衡时间)的坡面流近似解

在净雨历时 $t_r<t_e$ 的情况下, $t\leqslant t_r$ 时段的坡面流变化过程与净雨历时 $t_r\geqslant t_e$ 情况下同时段的变化过程是一致的, 因而由式(16)、(17)可得坡面流近似解为

$$h(x,t) = h_e \sin(\pi x/2L)(1-e^{Ut})/(1+e^{Ut}) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_r) \tag{25}$$

$$q(x,t) = m\sqrt{S_0}\,h_e^2 \sin^2(\pi x/2L)(1-e^{Ut})^2/(1+e^{Ut})^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_r) \tag{26}$$

同理, 在净雨为零时 ($t=t_r$), 坡末端出口断面水深由 (25)式得

$$h_L(t_r) = h_e(1-e^{Ut_r})/(1+e^{Ut_r}) \tag{27}$$

则由式(6)、(7)、(21)、(27)可得在净雨历时 $t_r<t_e$ 时, 坡面流退水段近似解为

$$h(x,t) = [(m\sqrt{S_0})^{0.5}(rL)^{-0.5}(1+e^{Ut_r})(1-e^{Ut_r})^{-1} + \pi m\sqrt{S_0}(t-t_r)/2L]^{-1}\sin(\pi x/2L) \quad (t>t_r) \tag{28}$$

$$q(x,t) = m\sqrt{S_0}\sin^2(\pi x/2L)[(m\sqrt{S_0})^{0.5}(rL)^{-0.5}(1+e^{Ut_r})(1-e^{Ut_r})^{-1} + \pi m\sqrt{S_0}(t-t_r)/2L]^{-2} \quad (t>t_r) \tag{29}$$

式中 $U=-4r^{0.5}L^{1.5}(m\sqrt{S_0})^{-1.5}/\pi$.

由此可知, 在净雨历时 $t_r<t_e$ 的条件下, 由式(25)、(26)、(27)、(28)可得坡面流随时空变化的漫流过程。

4 坡面粗糙度系数的确定

A. A. 切卡索夫以 H. 巴津系数为基础, 将坡面粗糙度系数 λ 表示为[5]

$$\lambda = 87/m \tag{30}$$

式中 m 为巴津系数 (S^{-1}).

在前期降雨充分的条件下, 可认为坡面土壤含水量达到饱和, 则土壤下渗率近似为零, 此时, 净雨率 $r=I$ (I 为雨强 (m/s)). 由式(24)可得在降雨历时 $t_r \geqslant t_e$ 时坡末端坡面流退水方程为

$$q(L,t) = m\sqrt{S_0}[(m\sqrt{S_0})^{0.5}(IL)^{-0.5} + \pi m\sqrt{S_0}(t-t_r)/2L]^{-2} \quad (t>t_r \geqslant t_e) \tag{31}$$

上式可简化为

$$m = 4L(IL/q(L,t)-1)^2/[\pi^2(t-t_r)^2 I\sqrt{S_0}] \tag{32}$$

式中 $t-t_r$ 为退水历时 (S), $q_L(L,t)$ 为相应时刻 t 的退水单宽流量 (m^2/s), I 为雨强 (m/s), L 为坡长 (m), m 为巴津系数 (S^{-1}).

利用式(32)、(30)可判断坡面粗糙度.

5 结束语

1 由于山区流域的坡面比降大, 糙率大, 水流流态多为紊流, 坡面水流接近运动波. 因此, 利用运动波近似假定来求解山区流域坡面流是可行的, 借助 Govindaraju *et al.* 提出的坡面流分离变量形式, 导出了坡面流的偏微分基本方程.

2 利用导出的坡面流基本方程, 根据净雨历时与汇流平衡时间的关系, 得到了不同净雨历时的坡面流近似解.

3 以退水过程为基础, 可用 A. A. 切卡索夫定义的粗糙度关系式分析坡面粗糙程度.

参 考 文 献

[1] 薛焱森主编. 水文学原理(教材). 成都科技大学水电院水利系, 1988-5. 131～134

[2] Govindaraju. *et al*. Approximate analytical solutions for overland flow. *Water Resources Research*, 1990, 26(2): 2903～2912

[3] D. A. Woolhiser and J. A. Liggett. Unsteady one-dimensional flow over a plane—the rising hydrograph. *Water Resources Research*, 1967, 3(3): 753～771.

[4] 沈 冰, 李怀恩, 沈 晋. 坡面降雨强度漫流过程中有效糙率的实验研究. 水利学报, 1994, (10): 61～68

[5] 吴长文, 王礼先. 林地坡面的水动力学特性及其延阻地表径流的研究. 水土保持学报, 1995, 9(2): 32～38

[6] 文 康, 金管生, 李 琪等编著. 地表径流过程的数学模拟. 北京: 水利电力出版社, 1990. 144～146

第一作者简介 王协康, 男, 硕士, 现为四川联合大学高速水力学国家重点实验室在职博士研究生.

AN APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION FOR OVERLAND FLOW IN MOUNTAIN WATERSHED

Wang Xiekang Fang Duo Cao Shuyou

(*State Key Hydraulics Laboratory of High Speed Flows, Sichuan Union University, Chengdu* 610065)

Abstract

Assuming overland flow approximated to the kinetic wave in mountain watershed, a differentical equation for overland flow was obtained by means of dispersed variable form given by Govindaraju et al. This study obtained overland flow processes in different net rain duration according to the relationship betweer net rain and equilibrium flow duration.

Key words mountain watershed, overland flow, kinetic wave

本刊入编《中国学术期刊(光盘版)》启事

本刊1999年起入编《中国学术期刊(光盘版)》, 作者稿件一经本刊录用, 将同时被《中国学术期刊(光盘版)》收录. 作者如不同意, 请在投稿时向本刊说明. 另外, 1999年以前在本刊上发表的文章也将被作为过刊编入《中国学术期刊(光盘版)》, 若有作者不同意, 请于1999-03-01前来函向本刊声明, 否则本刊将视为同意收录.

《山地研究》编辑部